第二篇

小学篇

12　三角形面积

第 1 节　等积变换

例 1 如图 12.2，已知三条直线 a，b，c 相互平行，$BD=FH$，$\triangle ABD$ 的面积是$\triangle GFH$ 的面积的 2 倍，$\triangle BCD$ 的面积为 4，求四边形 $EFGH$ 的面积。

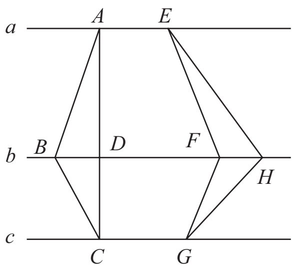


图 12.2

例 2 给定三角形，用两种不同的方法把三角形分成面积比为 3 : 4 : 5 的 3 块。

例 3 已知四边形 $ABCD$ 两条对角线相交于 O，

求证：$S_{\triangle ABO}S_{\triangle CDO}=S_{\triangle ADO}S_{\triangle CBO}$

例 4 如图 12.6，把$\triangle ABC$ 的边 AB 延长 2 倍到 D，另一边 AC 延长 $\frac{3}{2}$ 倍到 E，得到一个较大的$\triangle ADE$，则$\triangle ADE$ 的面积是$\triangle ABC$ 面积的多少倍？

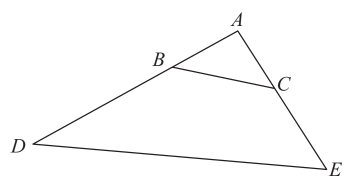


图 12.6

第 2 节　等边三角形

例 1 如图 12.7，等边$\triangle ABC$中有一点P，过P点向三边作垂线，垂足分别为D、E和F，分别连接P和等边三角形的 3 个顶点。已知等边$\triangle ABC$面积为 100，$\triangle PAD$和$\triangle PBE$的面积都是 15，求$\triangle PCF$的面积。

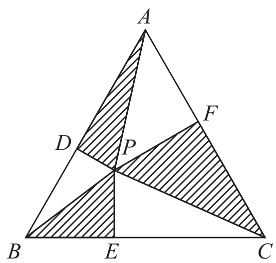


图 12.7

例 2 如图 12.9，已知$\triangle ABC$是等边三角形，面积为 100，D、E和F分别是三边的中点，P、Q为DF上两点，AP和AQ分别交DE和FE于G和H，BH与CG交于R，已知$\triangle ADP$、$\triangle AFQ$和$\triangle RBC$的面积之和为 36，求阴影部分的面积。

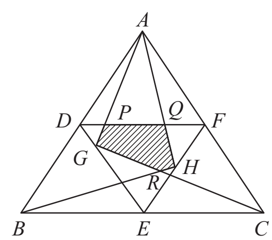


图 12.9

第 3 节　勾股定理

例 1 如图 12.11，在等腰 Rt△ABC 中，斜边 AB 上有一点 D，已知 $CD=7$，$BD-AD=4$，求△ABC 的面积。

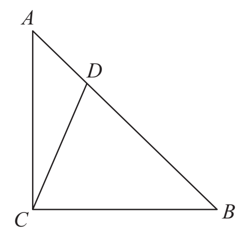


图 12.11

例 2 如图 12.13，已知在四边形 $ABCD$ 中，$\angle C=\angle A=90°$。$CD-BC=4$，$AB+AD=12$，求四边形 $ABCD$ 的面积。

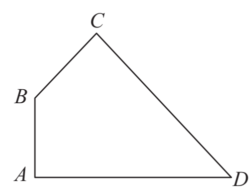


图 12.13

例 3 如图 12.15，P 是等腰 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 外一点，$PB=8$，$\triangle ABP$ 的面积为 96，$\triangle PBC$ 的面积为 28，求 $\triangle ABC$ 的面积。

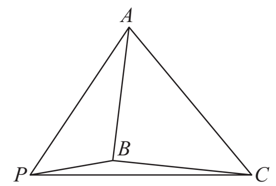


图 12.15

13 加辅助线

例 1 如图 13.1，长方形 $ABCD$ 中阴影部分的面积是 23，求四边形 $EFGH$ 的面积。

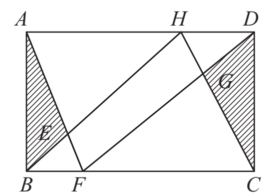


图 13.1

例 2 如图 13.3，四边形 $ABCD$ 中，$\angle B=\angle D=90°$，$\angle C=45°$，$AB=1.8$，$BC=5$，求四边形 $ABCD$ 的面积。

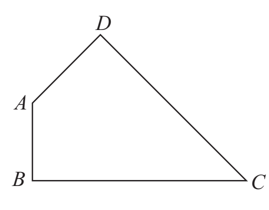


图 13.3

例 3 如图 13.5，已知长方形 $ABCD$ 的面积是 4，$EC=3DE$，F 是 DG 的中点，求阴影部分的面积。

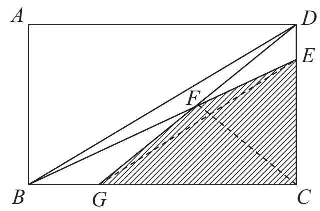


图 13.5

例 4 已知直角△ACB 三边长为 7、24、25。现将短直角边翻折到与斜边重合，求剩下的阴影部分的面积。

例 5 如图 13.7，BD 和 CF 将长方形 $ABCD$ 分成四块，已知 $\triangle EFD$ 的面积为 8，$\triangle DEC$ 的面积为 12，求四边形 $AFEB$ 的面积。

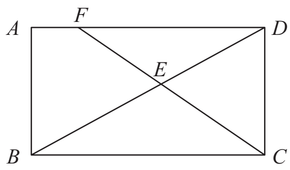


图 13.7

例 6 如图 13.9，已知长方形 $ABCD$ 的面积是 4，$EC=3DE$，F 是 DG 的中点，求阴影部分的面积。

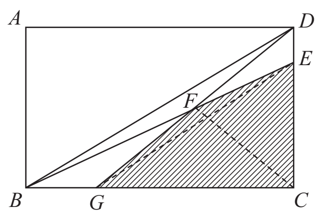


图 13.9

例 7 如图 13.10，$\triangle ABC$ 的面积为 28，$DC=3DB$，$AE=ED$，求阴影部分面积。

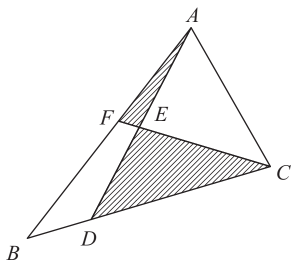


图 13.10

例 8 如图 13.11，已知 P 是$\triangle ABC$ 内一点，DE 平行于 AB，FG 平行于 BC，HI 平行于 CA，四边形 $AIPD$ 面积为 12，四边形 $PGCH$ 面积为 15，四边形 $BEPF$ 面积为 20，求$\triangle ABC$ 的面积。

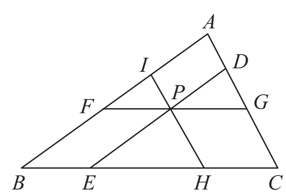


图 13.11

14 四边形面积

第 1 节 利用四边形的特点

例 1 如图 14.1，已知一个大长方形被分割成 4 个小长方形，其中 3 个小长方形 A、B、C 的面积是已知的，分别为 30、15、40，求第四个小长方形 D 的面积是多少？

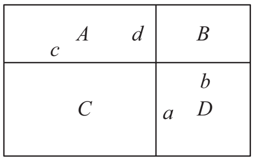


图 14.1

例 2 如图 14.2，大、中、小 3 个正方形连环套，大正方形周长比小正方形周长大 8，大正方形面积比中正方形面积大 12，求大正方形的面积。

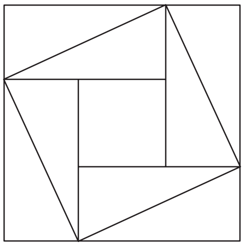


图 14.2

第 2 节　正方形

例 1 如图 14.3，中、小两个正方形把大正方形分成了 3 个部分，外层环形面积为 104，内层环形面积为 72，而且 3 个正方形的边长成等差数列，求大正方形面积。

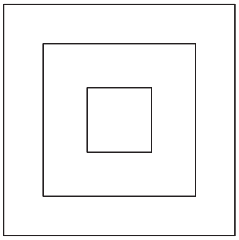


图 14.3

第 3 节　割补法

例 1 如图 14.5，两个正方形边长分别为 10 和 8，求△ACD 的面积。

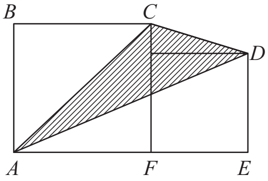


图 14.5

例 2 如图 14.8，两个正方形边长分别为 8 和 6，求$\triangle BOE$的面积。

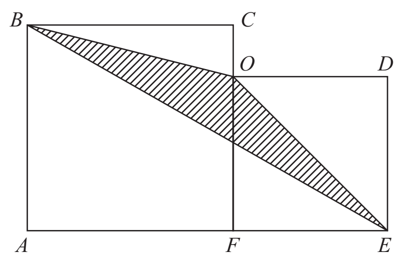


图 14.8

例 3 如图 14.11，两个正方形边长分别为 11 和 7，其中E、B和M在同一直线上，求阴影部分的面积。

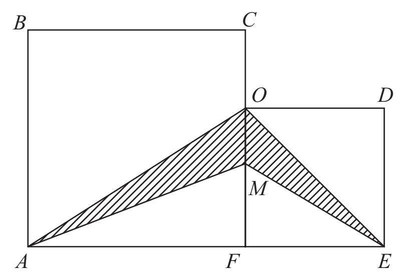


图 14.11

例 4 如图 14.14，正方形 $ABCD$ 的边长为 14，正方形 $DEFG$ 的边长为 10，H 是正方形 $DEFG$ 的中心（对角线的交点），求阴影部分的面积。

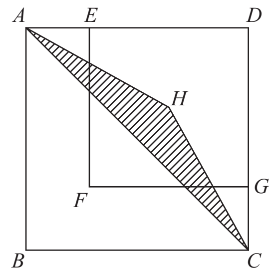


图 14.14

例 5 如图 14.16，3 个正方形中，大正方形 $AC'OB'$ 的边长是两个同样大小的小正方形边长的 2 倍，若小正方形的边长是 10，求阴影部分面积。

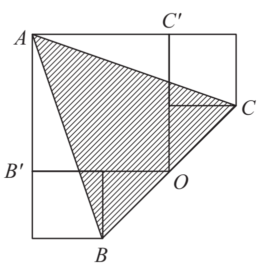


图 14.16

第 4 节　拼出来的难题

例 1 如图 14.18，3 个大小不等的正方形拼接在一起，中间的正方形边长为 15，AC 恰好经过中间正方形的左上顶点，求$\triangle ABC$ 的面积。

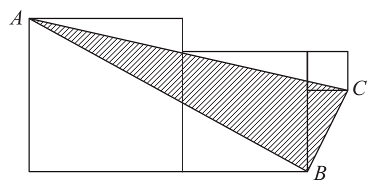


图 14.18

例 2 如图 14.20，已知正方形 $ABCD$ 的边长为 12，正方形 $BEFG$ 的边长为 8，正方形 $PCQR$ 的边长为 7，求阴影部分面积。

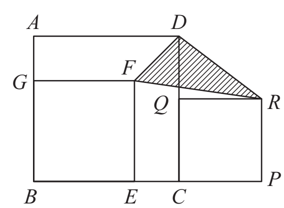


图 14.20

第 5 节　任意四边形

例 1 给定一个任意四边形，求作一条直线，把这个四边形分成面积相等的两块。

例 2 如图 14.24，已知在四边形 $ABCD$ 中，E 和 F 分别是 AB 和 CD 的中点，求证：四边形 $DEBF$ 的面积是四边形 $ABCD$ 的一半。

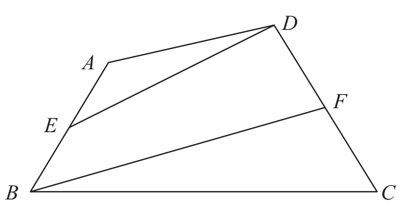


图 14.24

例 3 如图 14.26，在梯形 $ABCD$ 中，E 和 F 为梯形两条腰上的中点，AF 和 DE 交于 N，BF 和 CE 交于 M，已知$\triangle AND$ 和$\triangle BCM$ 的面积分别为 15 和 20，求四边形 $EMFN$ 的面积。

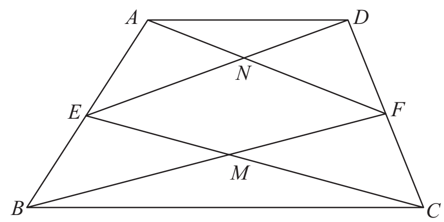


图 14.26

例 4 如图 14.28，在四边形 $ABCD$ 中，E 和 F 分别是 AD 与 BC 边上的中点，已知$\triangle AMB$ 和$\triangle DNC$ 的面积分别为 9 和 13，求四边形 $FNEM$ 的面积。

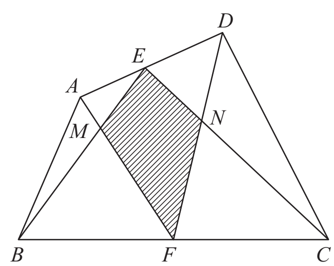


图 14.28

例 5 如图 14.29，在四边形 $ABCD$ 中，点 E、F、G、H 分别是 AD、DC、CB、BA 边上的中点，连接 BE、DG、AF、HC，已知 $\triangle AEP$、$\triangle DQF$、$\triangle RGC$、$\triangle HSB$ 的面积分别为 7、10、9、6，求阴影部分面积。

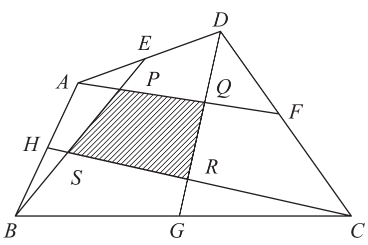


图 14.29

例 6 如图 14.30，在梯形 $ABCD$ 中，点 E 是 AB 的中点，点 F、G 是边 CD 的三等分点。$\triangle ADG$ 的面积是 17，$\triangle GEA$ 的面积为 31，求 $\triangle BCF$ 的面积。

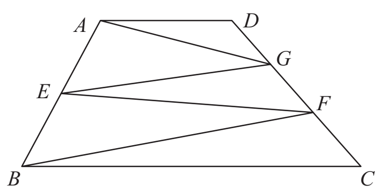


图 14.30

例 7 如图 14.32，P 是长方形 $ABCD$ 内一点，已知 $\triangle PAB$ 的面积是 7，$\triangle PBC$ 的面积是 3，求 $\triangle PBD$ 的面积。

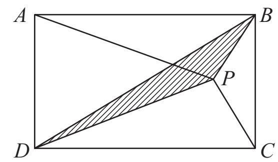


图 14.32

例 8 已知图 14.33 中的长方形被分割成若干小块，其中某些小块的面积分别为 7、9、19，求图中阴影部分的面积。

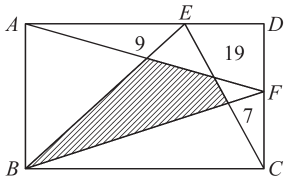


图 14.33

例 9 如图 14.34，在长方形 $ABCD$ 中，E 为 AD 边上一点，已知△APB、△CQD 和长方形面积分别为 17、19、88，求四边形 $EPOQ$ 的面积。

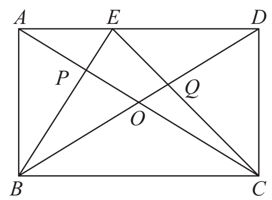


图 14.34

例 10 如图 14.35，已知正方形 $ABCD$ 的边长是 14，过 G 和 F 分别向 AB 和 BC 作垂线，垂足为 K 和 L，EK=3，HL=4，求四边形 $EFGH$ 的面积。

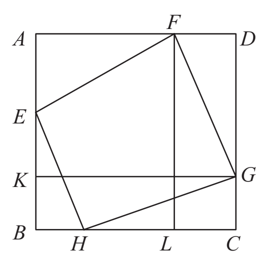


图 14.35

第 6 节　巧用勾股定理

例 1 如图 14.37，正方形 $ABCD$ 的边长为 13，E 和 F 是正方形外两点，且 $AE=CF=12$，$BE=DF=5$，求 EF^2 的值。

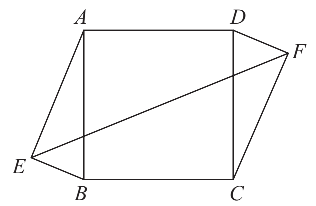


图 14.37

例 2 如图 14.40，在直角边为 3 和 4 的直角三角形各边往外作正方形，3 个正方形的顶点依次为 A、B、C、D、E、F，求六边形 $ABCDEF$ 的面积。

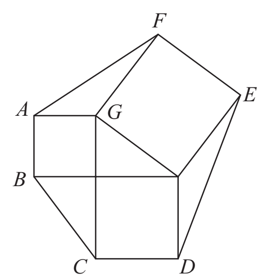


图 14.40

例 3 如图 14.42，以正方形 $ABCD$ 的边为斜边作 Rt△ABE，$\angle AEB=90°$，$AE=4$，$BE=6$，求△OED 的面积。

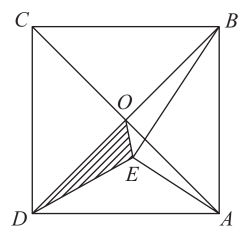


图 14.42

例 4 如图 14.44，梯形 $ABCD$ 上底 AB 长 10，下底 DC 长 24，腰 BC 长 16，过 D 作 DE 垂直于 BC，$DE=18$，求梯形 $ABCD$ 的面积。

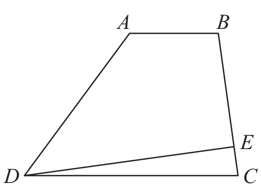


图 14.44

15 多边形面积的杂题

例 1 如图 15.2，已知正六边形 $ABCDEF$ 的面积为 720，求图中两块阴影部分的面积差。

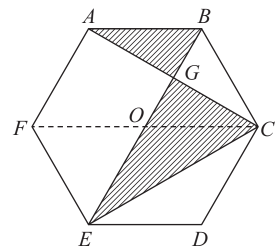


图 15.2

例 2 如图 15.4，正六边形 $ABCDEF$ 中，H 是 DE 的中点，$\triangle ABG$、四边形 $BHEG$ 和四边形 $BCDH$ 的面积成等差数列，求 $EG:GF$。

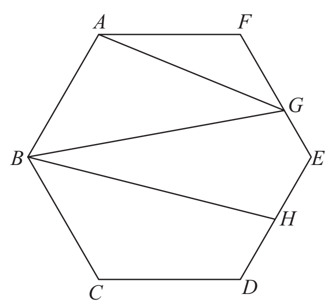


图 15.4

例 3 如图 15.6，两个正六边形的面积都是 2019，中间的连接部分是一个正方形，求图中阴影部分面积。

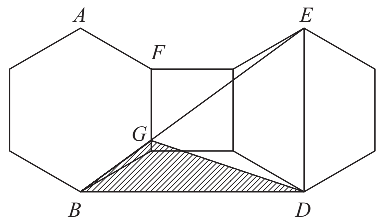


图 15.6

例 4 如图 15.13，正方形 $ABCD$ 的面积为 112，$CF=\dfrac{BC}{3}$，$AE=\dfrac{AB}{2}$，求阴影部分的面积。

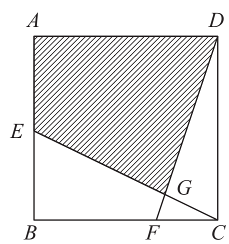


图 15.13

例 5 如图 15.16，在平行四边形 $ABCD$ 中，E、F 分别是 BC、CD 的中点，已知 $\triangle AGH$ 的面积为 3，求五边形 $CEGHF$ 的面积。

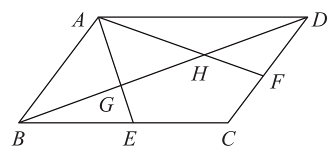


图 15.16

例 6 如图 15.17，在面积为 225 的正方形 $ABCD$ 中，E 是 AD 中点，H 是 GF 中点，$DF=CG$，求 $\triangle AGH$ 的面积。

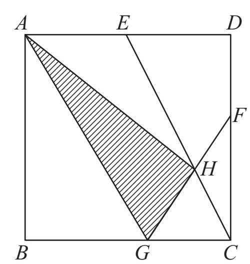


图 15.17

例 7 如图 15.20，在正方形 $ABCD$ 中，E 为 CD 的中点，G 和 F 为 AD 的四等分点，已知 $\triangle GHK$ 的面积为 4，求正方形面积。

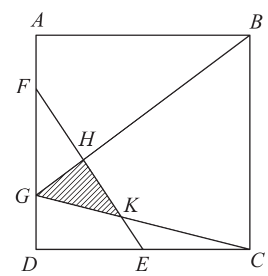


图 15.20

例 8 如图 15.22，正方形 $ABCD$ 的面积为 1，M 为 CD 的三等分点，E 和 F 是 BC 的三等分点，求四边形 $EFGH$ 的面积。

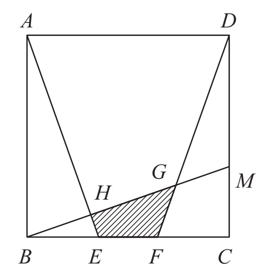


图 15.22

例 9 如图 15.24，正六边形 $ABCDEF$ 的面积为 1222，K、M、N 分别是 AB、CD、EF 的中点，求 $\triangle PQR$ 的面积。

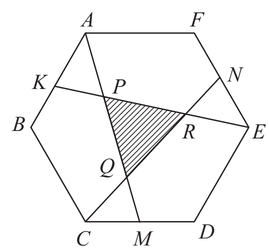


图 15.24

例 10 如图 15.29，$\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，$\angle BAC=120°$，$\triangle ADE$ 是等边三角形，点 D 在 BC 上，已知 $BD:DC=2:3$，$\triangle ABC$ 的面积为 50，求 $\triangle ADE$ 的面积。

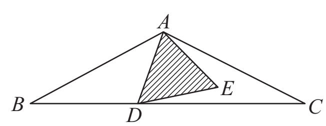


图 15.29

16　圆的面积

例 1 图 16.1 中有半径为 3、4、5 的 3 个圆，问：半径为 3 和 4 的圆的公共部分和阴影部分的面积相比，哪个大？大多少？

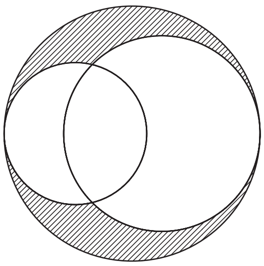


图 16.1

例 2 如图 16.2，圆环内有一条两个端点都在大圆上的线段和小圆相切，线段长度为 10，求阴影部分的面积。

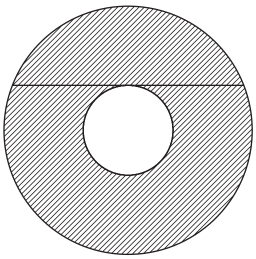


图 16.2

例 3 如图 16.3，正方形 $ABCD$ 的面积是 81，E、F 分别是两个半圆的中点，求阴影部分的面积。

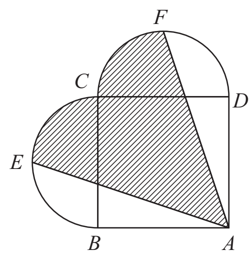


图 16.3

例 4 如图 16.5，$\triangle OAB$ 和 $\triangle ODC$ 都是等腰直角三角形，且图中阴影部分面积为 30，求圆环面积。

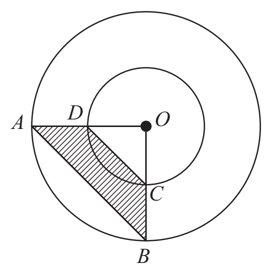


图 16.5

例 5 如图 16.6，在半径为 4 的圆中有两条互相垂直的线段，问：阴影部分和空白部分哪个面积更大？大多少？

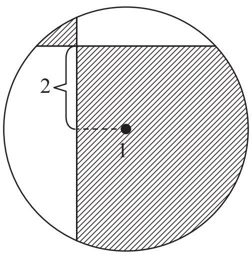


图 16.6

例 6 已知扇形的圆心角是 120°，半径为 5，求扇形的周长。

例 7 如图 16.8，Rt△ABC 斜边长为 12，$\angle ABC=60°$，此时 BC 长为 6。以 B 为中心，将△ABC 顺时针旋转 120°，求 AC 边扫过的阴影图形的面积。

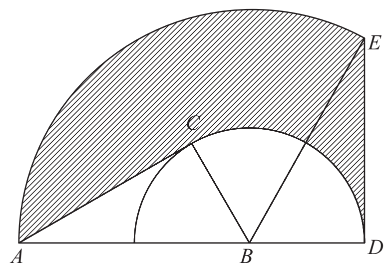


图 16.8

例 8 如图 16.10，长方形 $ABCD$ 绕 C 顺时针旋转 90°，$AB=12$，$BC=5$，$AC=13$，求 AD 扫过的面积。

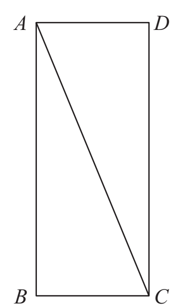


图 16.10

例 9 如图 16.14，正六边形的面积为 4160，空白部分是 6 个半径为 20 的小扇形，求阴影部分面积。

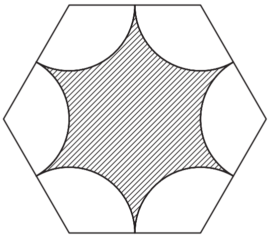


图 16.14

例 10 如图 16.15，正方形边长为 1，正方形的 4 个顶点和 4 条边分别为 4 个圆的圆心和半径，求阴影部分面积。

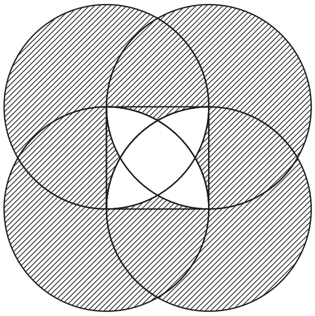


图 16.15

例 11 如图 16.18，4 个圆的圆心是一个正方形的 4 个顶点，如果每个圆的半径是 2，求阴影部分的总面积。

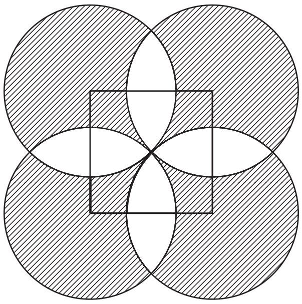


图 16.18

例 12 如图 16.20，3 个圆半径都是 10，且两两相交于圆心，求阴影部分面积和。

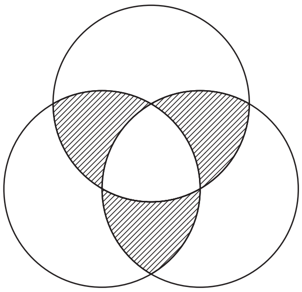


图 16.20

例 13 图 16.22 中是一个钟表的表盘，求图中阴影部分甲与阴影部分乙的面积之比。

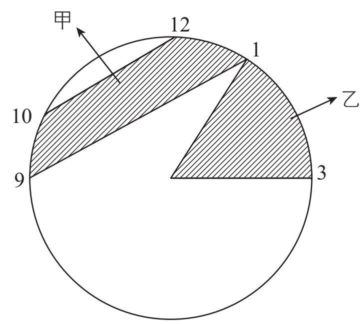


图 16.22

例 14 如图 16.24，两个半径为 1 的半圆垂直相交（两条直径垂直），求图中两块阴影部分的面积之差。

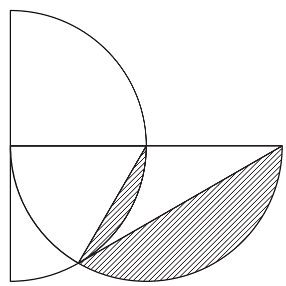


图 16.24

第三篇

初中篇

18　全等三角形

例 1 如图 18.4，在四边形 $ABCD$ 中，$AB=BC$，$CD=DA$，求证：两条对角线 AC 和 BD 互相垂直，且 BD 平分 AC。

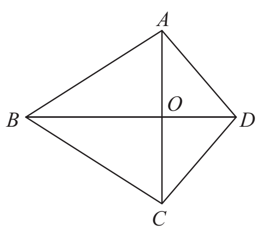


图 18.4

例 2 如图 18.6，在筝形 $ABCD$ 中，$AB=BC$，$CD=DA$，$BK=2AK$，$BL=2CL$，M 和 N 分别是 CD 和 DA 的中点，求证：$KM=LN$。

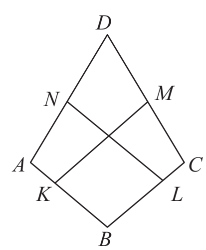


图 18.6

例 3 如图 18.8，设 P 为等腰直角三角形 ACB 的斜边 AB 上任意一点，PE 垂直 AC 于 E，PF 垂直 BC 于 F，PG 垂直 EF 于 G，延长 GP 并在延长线上取一点 D，使得 $PD=PC$，求证：$BC\perp BD$，$BC=BD$。

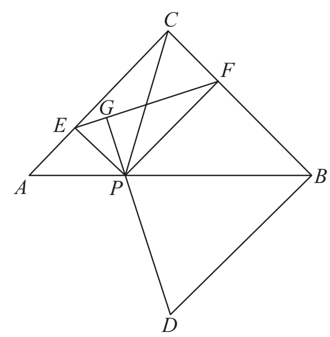


图 18.8

例 4 如图 18.9，在△ABC 中，D 是 BC 中点，$DE\perp DF$，试判断 $BE+CF$ 与 EF 的大小关系，并证明你的结论。

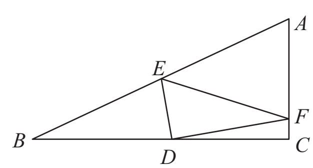


图 18.9

例 5 如图 18.10，在凸四边形 $ABCD$ 中，$\angle ADB=\angle ABC=105^\circ$，$\angle DAB=\angle DCB=45^\circ$，求证：$CD=AB$。

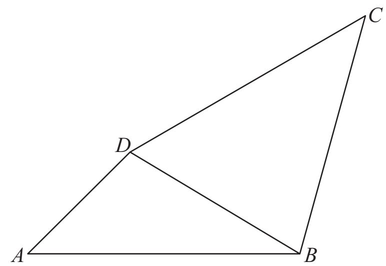


图 18.10

例 6 如图 18.12，在等边$\triangle ABC$内有一点 O，已知$\angle AOB=117^\circ$，$\angle BOC=121^\circ$，若有一个三角形的三边边长恰为 OA、OB、OC。求这个三角形各角的度数。

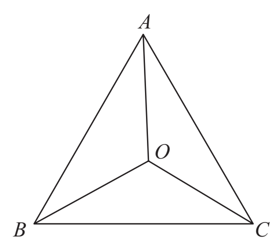


图 18.12

19 三角形的“三条线”

第 1 节 中线

例 1 已知$\triangle ABC$中，AD是边BC上的中线，求证：$AB+AC>2AD$。

例 2 如图 19.3，在$\triangle ABC$中，AD是BC边上的中线，E是AD上一点，延长BE交AC于F，$AF=EF$。求证：$AC=BE$。

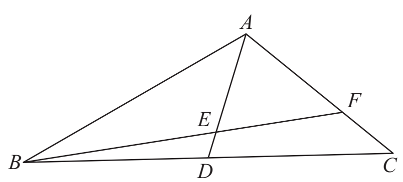


图 19.3

第 2 节 角平分线

例 1 如图 19.7，在△ABC 中，$AB > AC$，AD 为角平分线，P 是 AD 上一点。求证：$PB-PC<AB-AC$。

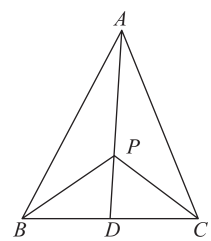


图 19.7

例 2 如图 19.9，在△ABC 内，$\angle BAC=60°$，$\angle ACB=40°$，P、Q 分别在 BC、CA 上，并且 AP、BQ 分别是$\angle BAC$、$\angle ABC$ 的角平分线。求证：$BQ+AQ=AB+BP$。

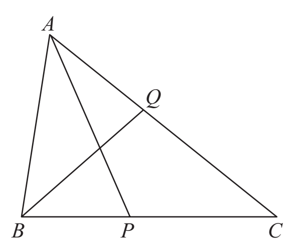


图 19.9

第3节 高

例1 如图19.11，已知$\triangle ABC$和$\triangle DEF$中，$\angle B=\angle E$，$\angle C=\angle F$，AG是$\angle BAC$的角平分线，DH是$\angle EDF$的角平分线，且$AG=DH$，求证：$\triangle ABC$和$\triangle DEF$两个三角形全等。

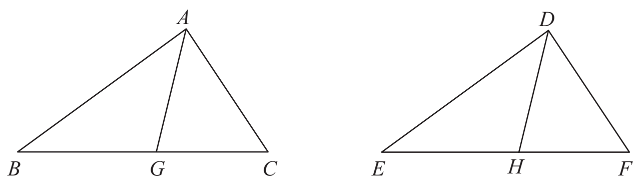


图19.11

20　等腰三角形和等边三角形

例 1 已知等腰三角形的两边长为 7 和 8，则周长为多少?

例 2 已知等腰三角形两边长为 4 和 8，则周长是多少?

16 或 20！

来，来，来，这位同学，你给我画一个边长为 4, 4, 8 的等腰三角形看看！两边之和大于第三边，这个定理被你扔到哪里去了？模仿不是照搬，这是我一而再、再而三强调的事情。

例 3 已知等腰三角形两边长为 4 和 6，则面积是多少？

例 4 已知等腰三角形一条腰上的高与另一条腰的夹角为 20°，求这条等腰三角形 3 个角的度数。

例 5 在等腰△ABC 中，$AB=AC$，D 是直线 BC 上任意一点，过 D 分别向 AB、AC 引垂线，垂足分别为 E、F，CG 是 AB 边上的高，问：DE、DF、CG 之间有怎样的关系？

例 6 如图 20.9，已知在△ABC 中，$AB=AC$，D 在 AB 上，E 在 AC 的延长线上，DE 交 BC 于 F，且 $DF=EF$，求证 $BD=CE$。

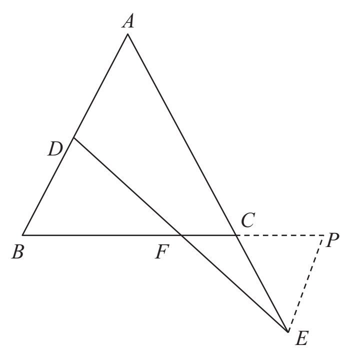


图 20.9

例 7 如图 20.10，已知在$\triangle ABC$中，AD是BC边上的中线，E是AD上一点，且$BE=AC$，延长BE交AC于F，求证$AF=EF$。

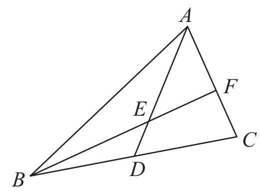


图 20.10

例 8 如图 20.11，六边形$ABCDEF$的 6 个内角都相等，且$AB+BC=13$，$FA-CD=5$。求$BC+DE$的值。

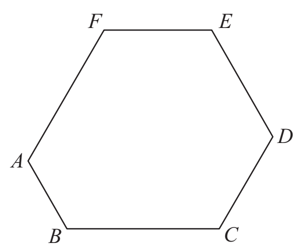


图 20.11

例 9 如图 20.13，在锐角$\triangle ABC$中，最长的高AH等于中线BM，也等于内角平分线CD。求证：$\triangle ABC$是等边三角形。

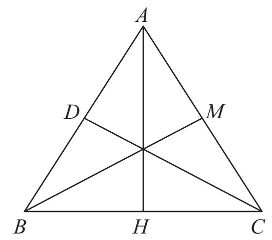


图 20.13

21 截长补短

例 1 如图 21.1，已知 AD 平分 $\angle BAC$，$AC=AB+BD$，求证：$\angle B=2\angle C$。

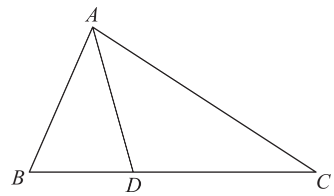


图 21.1

例 2 如图 21.3，在四边形 $ABCD$ 中，已知 AC 平分 $\angle BAD$，$CE\perp AB$，$AE=\dfrac{AB+CD}{2}$，求证：$\angle ABC+\angle ADC=180°$。

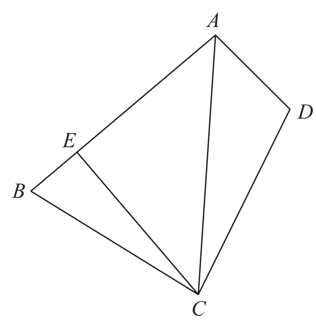


图 21.3

例 3 如图 21.5，已知$\triangle ABC$是等边三角形，$\triangle BDC$是顶角为 120° 的等腰三角形，以 D 为顶点作一个 60° 的角，角的两边分别交 AB 于 E，交 AC 于 F，连接 EF。求证：$BE+CF=EF$。

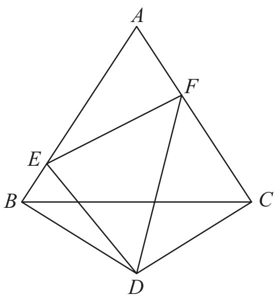


图 21.5

例 4 如图 21.7，在$\triangle ABC$中，AD 为$\angle BAC$的角平分线，M 为 BC 中点，$MF//AD$ 交 AC 于 F。求证：$2AF=AC-AB$。

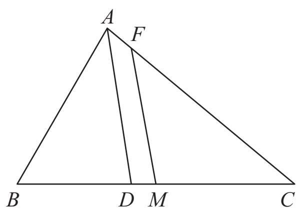


图 21.7

22 对称

例 1 如图 22.5，已知 AD 是五边形 $ABCDE$ 的一条对角线，且 $\angle EAD > \angle ADC$，$\angle EDA > \angle DAB$，求证：$AE+ED > AB+BC+CD$。

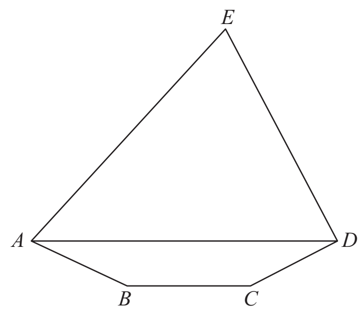


图 22.5

例 2 如图 22.10，在长方形 $ABCD$ 中，$AB=20$，$BC=10$，在 AC、AB 上各取一点 M、N，使得 $BM+MN$ 最小，求这个最小值。

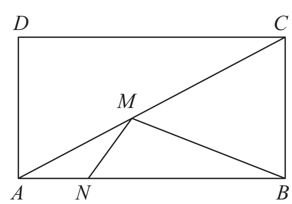


图 22.10

例 3 如图 22.14，已知$\angle AOB=30°$，$OA=7$，$OB=24$，在 OB 上取点 P，AC 上取点 Q，设 $d=PA+PQ+QB$，求 d 的最小值。

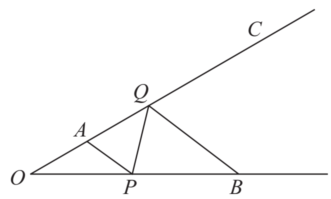


图 22.14

例 4 如图 22.16，在四边形 $ABCD$ 中，$AB=30$，$AD=48$，$BC=14$，$CD=40$，$\angle ABD+\angle BDC=90°$，求四边形的面积。

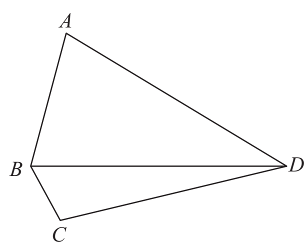


图 22.16

23 平移

例 1 如图 23.1，两条长为 1 的线段 AB 和 CD 相交于 O，且 $\angle AOC=60°$。求证：$AC+BD \geqslant 1$。

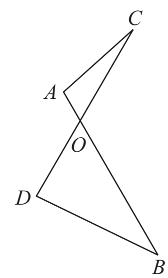


图 23.1

例 2 如图 23.3，在六边形 $ABCDEF$ 中，$AB//ED$，$BC//FE$，$CD//AF$，且 $BC-EF=DE-BA=FA-CD$。求证：六边形各内角相等。

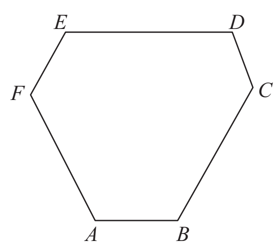


图 23.3

例 3 如图 23.6，$\triangle ABC$ 是等边三角形，$\triangle EDF$ 和 $\triangle ABC$ 三边交于 G、H、J、K、L、M，已知 $HL=KG=JM$，且 $LM^2+JK^2=GH^2$，求证：$DE\perp DF$。

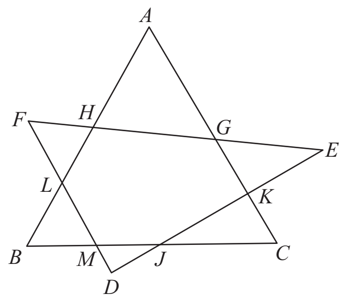


图 23.6

例 4 如图 23.8，已知平行四边形 $ABCD$ 对角线上有点 E，连接 AE、CE，且 $AE=CE$，$BE\neq DE$。求证：$ABCD$ 是菱形。

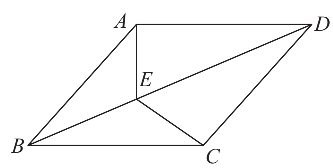


图 23.8

24 旋转

例 1 如图 24.1，已知点 E、F 分别在正方形 $ABCD$ 的边 BC、CD 上，$\angle EAF=45°$，且正方形和 $\triangle AEF$ 的面积比为 5∶2，求 $AB:EF$ 的值。

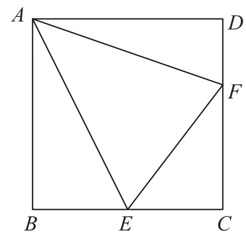


图 24.1

例 2 如图 24.4，在边长为 1 的正方形 $ABCD$ 的边 AB 上取点 P，边 BC 上取点 Q，边 CD 上取点 M，边 AD 上取点 N，如果 $AP+AN+CQ+CM=2$，求证：$PM\perp QN$。

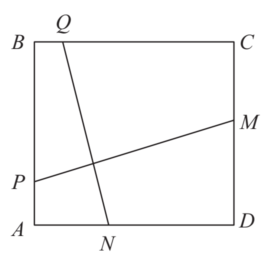


图 24.4

例 3 如图 24.7，在四边形$ABCD$中，$\angle ABC=30°$，$\angle ADC=60°$，$AD=DC$。求证：$AB^2+BC^2=BD^2$。

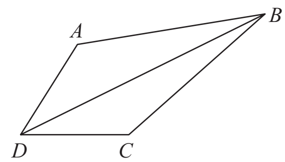


图 24.7

例 4 如图 24.10，以$\triangle ABC$的边AB、AC向外作正方形$ABDE$和正方形$CAFG$，连接EF，过A作BC的垂线，垂足为H，交EF于M，求证$EM=FM$。

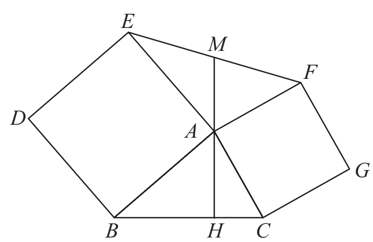


图 24.10

例 5 如图 24.13，已知△ABC 和△CDE 都是等边三角形，AD 交 CE 于 N，交 BE 于 F，BE 交 AC 于 M，求证：

1. △ACD 全等于△BCE；
2. $\angle AFB=60°$；
3. $\angle BMC+\angle DNC=180°$；
4. $MN//BD$；
5. △MNC 是等边三角形。

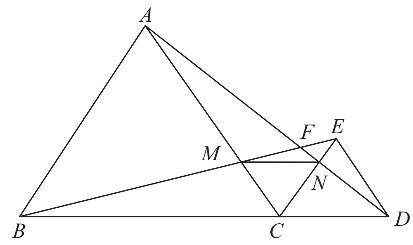


图 24.13

例 6 如图 24.14，如果△ABC、△CDE 和△EFG 都是等边三角形，且 D 是 AG 中点，求证：△BFD 是等边三角形。

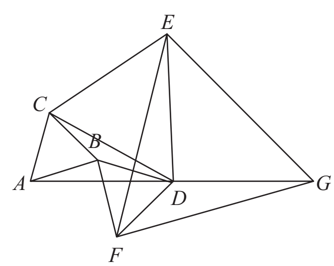


图 24.14

例 7 如图 24.17，在$\triangle ABC$中，$AB=3$，$AC=4$，$BC=5$，$\triangle ABD$、$\triangle ACE$和$\triangle BCF$都是等边三角形，求四边形$AEFD$的面积。

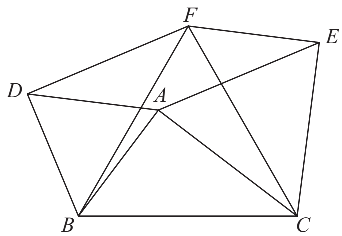


图 24.17

例 8 如图 24.18，已知$\triangle ABC$、$\triangle ADE$、$\triangle DBF$都是等边三角形（顶点逆时针排列），且$\triangle ADE$、$\triangle DBF$都在$\triangle ADB$的内侧。求证：CD和EF互相平分。

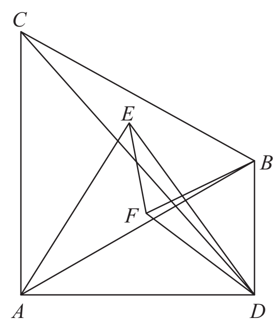


图 24.18

25 相似三角形

例 1 如图 25.2，已知$\triangle ABC$中，AD是$\angle BAC$的角平分线。求证：$\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{BD}{DC}$。

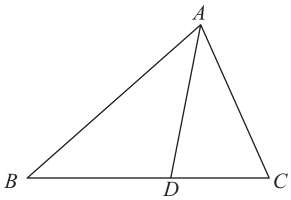


图 25.2

例 2 如图 25.4，已知长方形$ABCD$的对角线相交于O，$\angle ADC$的平分线交BC于E，交AC于F，$\angle BDE=15°$。求证：$\dfrac{OE}{OF}=\dfrac{OC}{OE}$。

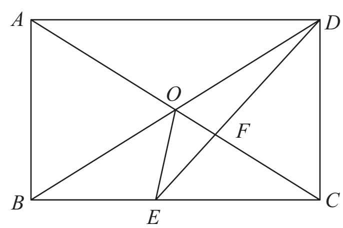


图 25.4

例 3 如图 25.5，四边形 $ABCD$ 是梯形，E 是 AD 上一点，CE 的延长线与 BA 的延长线交于 F，$ME//FB$，ME 与 CD 的延长线交于 M，BM 与 AD 交于 N。求证：$\angle AFN=\angle DME$。

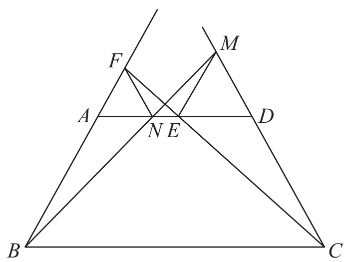


图 25.5

例 4 如图 25.6，已知 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 中，AD 和 $A'D'$ 分别是中线，且 $\frac{AB}{A'B'}=\frac{AD}{A'D'}=\frac{AC}{A'C'}$。求证：$\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 相似。

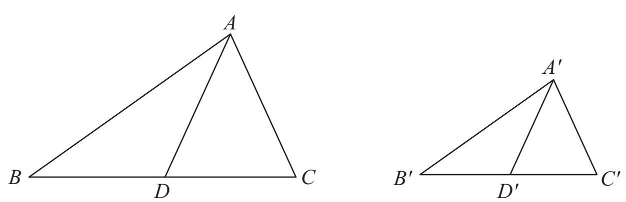


图 25.6

例 5 如图 25.10，设 P 是 $\triangle ABC$ 内一点，连接 AP、BP、CP 并延长，分别交 BC、AC、AB 于 D、E、F。求证：$\dfrac{PD}{AD}+\dfrac{PE}{BE}+\dfrac{PF}{CF}=1$。

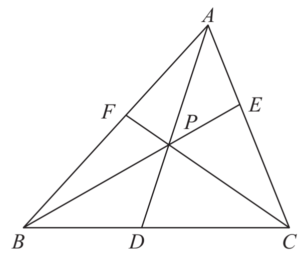


图 25.10

例 6 如图 25.12，设 P 是 $\triangle ABC$ 的高 AH 上任意一点，CP 和 BP 分别交 AB、AC 于 E、F。求证：AH 是 $\angle EHF$ 的角平分线。

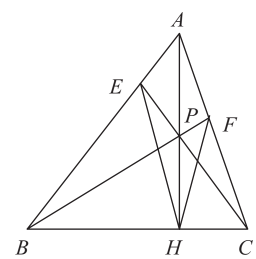


图 25.12

例 7 如图 25.15，设 P 是 $\triangle ABC$ 内一点，过 P 分别作直线平行于 $\triangle ABC$ 的各边，得到 3 个小三角形面积分别为 4、9、49。求 $\triangle ABC$ 的面积。

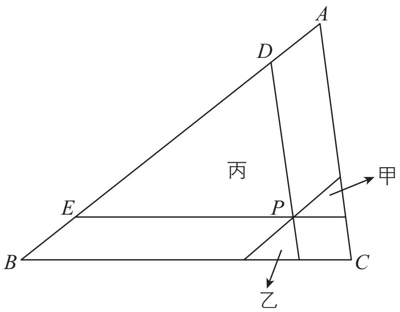


图 25.15

例 8 如图 25.16，$\triangle UVW$ 和 $\triangle XYZ$ 的边分别交于 A、B、C、D、E、F，若 $\frac{AB}{UV}=\frac{CD}{VW}=\frac{EF}{WU}$。求证：$\frac{BC}{XY}=\frac{DE}{YZ}=\frac{FA}{ZX}$。

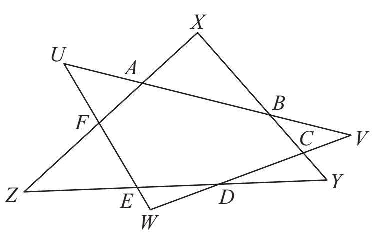


图 25.16

例 9 如图 25.19，AD 是锐角△ABC 的高，E 是 AD 上一点，且 $\dfrac{AE}{ED}=\dfrac{CD}{DB}$，过 D 作 $DF\perp BE$ 于 F。求证：$\angle AFC=90^\circ$。

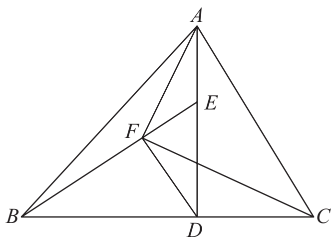


图 25.19

例 10 如图 25.20，△ABC 和△DEF 都是等边三角形，BC 和 EF 有共同的中点 G。求证：$AD\perp CE$。

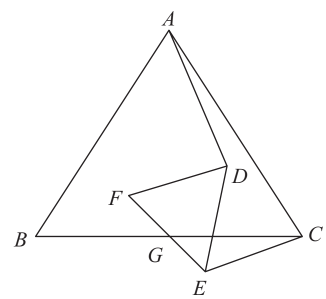


图 25.20

例 11 $\triangle ABC$ 中，a、b、c 分别是$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的对边，已知：$\angle A:\angle B:\angle C=4:2:1$，

求证：$\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$

26 中位线

例 1 如图 26.2，已知$\triangle ABC$中，$\angle B$和$\angle C$的角平分线为BE和CF，$AH\perp CF$于H，$AG\perp BE$于G，求证：$HG//BC$。

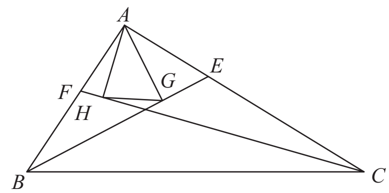


图 26.2

例 2 如图 26.4，已知四边形$ABCD$中，E、F分别是BC和AD的中点，延长BA和EF交于G，延长CD和EF交于H，且$\angle BGE=\angle CHE$。求证$AB=CD$。

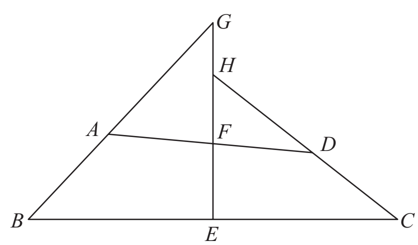


图 26.4

例 3 图 26.6，已知△ABC 中，分别以 AB、AC 为斜边作等腰直角三角形△AMB 和△ANC，P 是 BC 中点。求证：$PM=PN$。

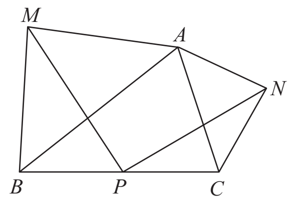


图 26.6

例 4 如图 26.8，在△ABC 中，D 为 AB 的中点，分别延长 CA、CB 到 E、F，使得 $DE=DF$。过 E、F 分别作直线 CA、CB 的垂线，相交于 P，求证：$\angle PAE=\angle PBF$。

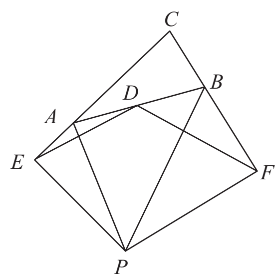


图 26.8

27 直角三角形

例 1 设 a，b，$c>0$，且 $a+b+c=32$，$\dfrac{b+c-a}{bc}+\dfrac{c+a-b}{ac}+\dfrac{a+b-c}{ab}=\dfrac{1}{4}$。

求证：以 a、b、c 的算术平方根为边长，恰好能构成一个直角三角形。

例 2 如图 27.1，在梯形 $ABCD$ 中，$AB//CD$，$\angle A+\angle B=90°$，E、F 分别是 AB、CD 的中点。求证：$EF=\dfrac{AB-CD}{2}$。

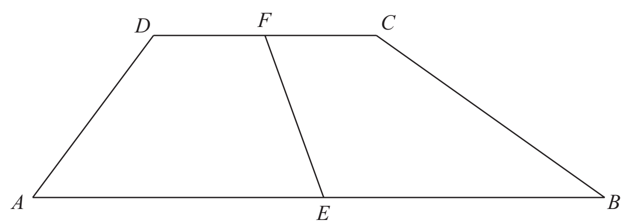


图 27.1

例 3 如图 27.4，已知$\angle B=\angle C=90°$，$\angle BAD$和$\angle ADC$各自的角平分线交于BC上一点E，$EF\perp AD$。

求证：$EF^2=CD\cdot AB$。

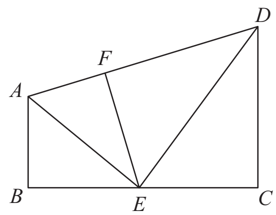


图 27.4

例 4 已知 Rt$\triangle ABC$中，$\angle C=90°$，$\dfrac{BC}{AB}=\dfrac{AB}{4AC}$，求$\angle A$的度数。

例 5 如图 27.6，在四边形 $ABCD$ 中，AC 和 BD 互相垂直，若 $AB=5$，$BC=12$，$CD=13$，求 AD 的长度。

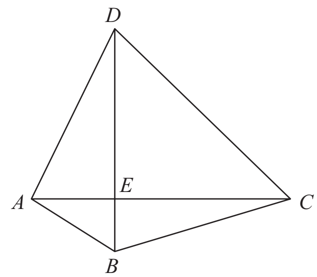


图 27.6

例 6 如图 27.7，在直角梯形 $ABCD$ 中，$\angle ABC=\angle BAD=90°$，$AB=16$。对角线 AC、BD 交于 E 点，过 E 作 $EF\perp AB$，O 为 AB 中点，且 $EF+EO=8$。求 $AD+BC$。

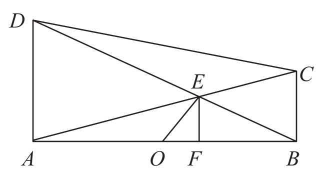


图 27.7

例 7 如图 27.8，在△ABC 中，$\angle ABC=5\angle C$，$\angle A$ 的平分线垂直 BD 于 H，$DE\perp BC$，若 M 是 BC 的中点。求证：$EM=\dfrac{BD}{2}$。

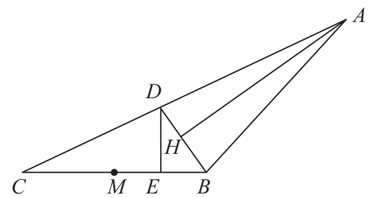


图 27.8

例 8 如图 27.10，P 为△ABC 内一点，$\angle PAC=\angle PBC$，$PM\perp AC$ 于 M，$PN\perp BC$ 于 N，D 是 AB 的中点。求证：$DM=DN$。

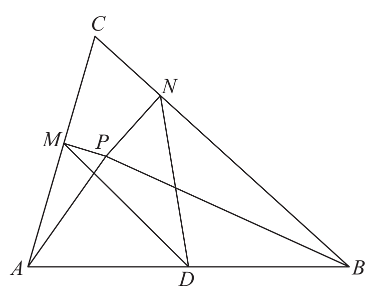


图 27.10

28　一般的四边形

例 1　在四边形 $ABCD$ 中，$\angle BAD$ 是直角，$AB=BC=2\sqrt{3}$，$AC=6$，$AD=3$，求 CD 的长度。

例 2　如图 28.3，四边形 $ABCD$ 中，$\angle A=60°$，$\angle B=\angle D=90°$，$AD=8$，$AB=7$，求 $BC+CD$ 的值。

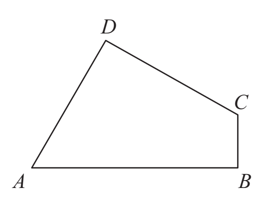


图 28.3

例 3 求证：若经过凸四边形中一组对边中点的直线与两条对角线所成的角相等，则这两条对角线等长（图 28.4）。

有没有似曾相识的感觉？什么？没有？回想一下第 26 章“中位线”中的例 2 里的那个经典的例子。

贼老师，我感觉完全不一样嘛！

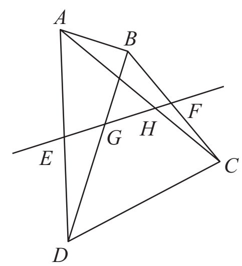


图 28.4

例 4 已知四边形 $ABCD$ 的面积为 32，AB、CD、AC 的长都是整数，且它们的和为 16。问：这样的四边形有几个？求这样的四边形边长的平方和的最小值。

例 5 如图 28.6，已知四边形 $ABCD$ 中，$AB=BC=CD$，$\angle A=80^\circ$，$\angle D=40^\circ$，求 $\angle B$ 的度数。

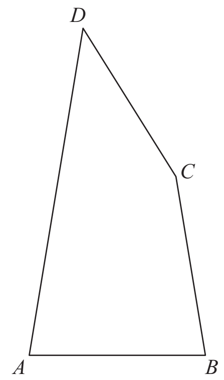


图 28.6

例 6 如图 28.8，已知在四边形 $ABCD$ 中，$AB=BD$，$\angle BAD=60^\circ$，$\angle BCD=120^\circ$。证明：$BC+DC=AC$。

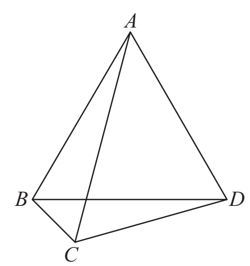


图 28.8

例 7 如图 28.10，在四边形 $ABCD$ 中，$AB=BC$，$\angle ABC=60°$，P 为四边形 $ABCD$ 内一点，且 $\angle APD=120°$。求证：$PA+PD+PC \geqslant BD$。

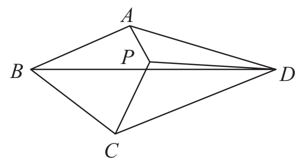


图 28.10

29 特殊的四边形

例 1 如图 29.1，已知平行四边形 $ABCD$ 中，BD 是其对角线，P_1，P_2 ⋯ P_{n-1} 是 BD 的 n 等分点，连接 AP_i 并延长交 BC 于 E，连接 AP_{n-i} 并延长交 CD 于 F。求证：$EF//BD$。

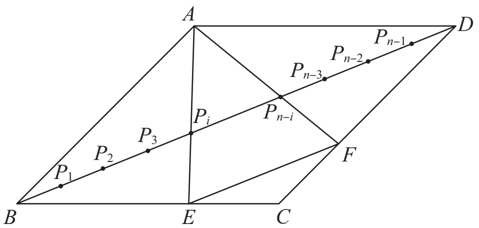


图 29.1

例 2 如图 29.2，在平行四边形 $ABCD$ 中，$AB \neq BC$，已知对角线长度比 $AC:BD=k$，AC 是 $\angle DAM$ 的角平分线，BD 是 $\angle CBM$ 的角平分线，求 $AM:BM$。

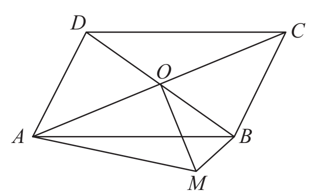


图 29.2

例 3 如图 29.3，在凸四边形 $ABCD$ 的边 AB 和 BC 上取点 E、F，DE 和 DF 三等分 AC 于 P 和 Q。$\triangle AED$ 和 $\triangle FCD$ 的面积都等于四边形 $ABCD$ 面积的 $\dfrac{1}{4}$。求证：四边形 $ABCD$ 是平行四边形。

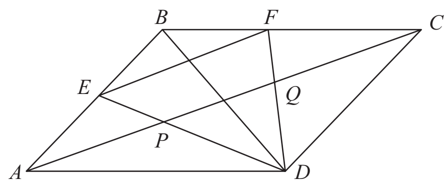


图 29.3

例 4 如图 29.5，已知 E、F、G、H 是任意凸四边形 $ABCD$ 四边中点。求证：$EFGH$ 是平行四边形。

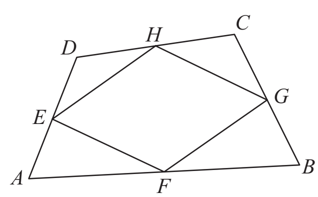


图 29.5

例 5 如图 29.7，设四边形 $ABCD$ 为凸四边形，在对角线 AC 上取两点 K 和 M，在 BD 上取两点 P 和 T，使得 $AK=MC=\dfrac{AC}{4}$，$BP=TD=\dfrac{BD}{4}$。过 AD 和 BC 的中点 S 和 R 连一直线，求证：该直线通过 PM 和 KT 的中点。

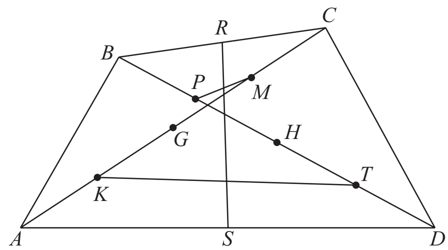
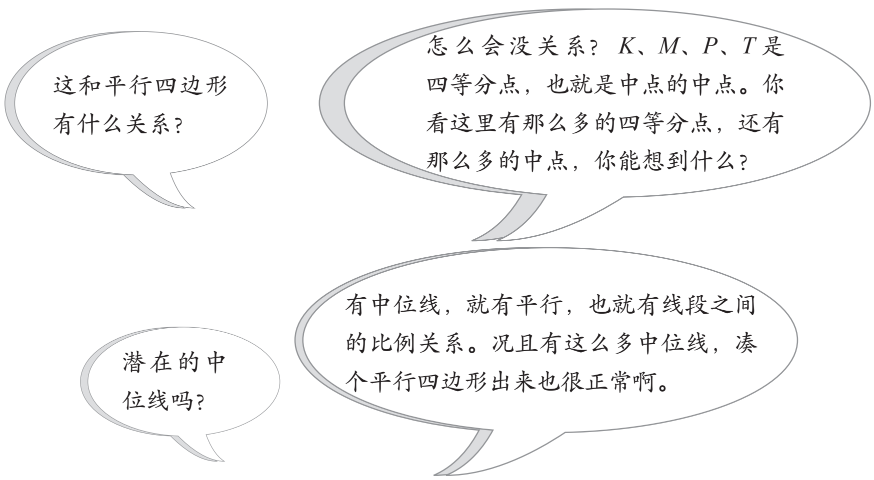


图 29.7



例 6 如图 29.10，在任意五边形 $ABCDE$ 中，M、N、P、Q 分别为 AB、CD、BC、DE 的中点，K、L 分别是 MN 和 PQ 的中点。求证：$KL // AE$，且 $KL=\dfrac{AE}{4}$。

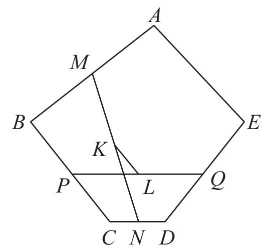


图 29.10

不是说好讲四边形吗？怎么又变五边形了？

今天非治治你这个“稍微一变就不会”的毛病。KL 平行且等于 $\dfrac{AE}{4}$，你想到了什么？

是不是找一条线段，让它对于 AE 来说是某个三角形中对应的中位线，同时 KL 又是它在某个三角形中对应的中位线？

30 长方形和菱形

例 1 如图 30.3，P、Q 分别是长方形 $ABCD$ 的边 BC、CD 延长线上的点，AP 和 CQ 相交于 E，且 $\angle PAD = \angle QAD$。求证：长方形 $ABCD$ 和 $\triangle APQ$ 面积相等。

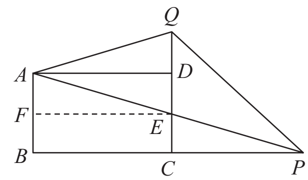


图 30.3

例 2 如图 30.4，已知平行四边形 $ABCD$ 中，AC、BD 相交于 O，P 是平行四边形外一点，$\angle APC = \angle BPD = 90°$，求证：平行四边形 $ABCD$ 是长方形。

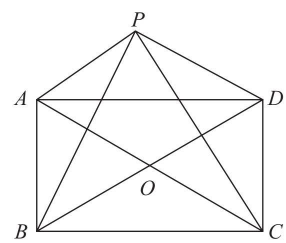


图 30.4

例 3 如图 30.6，在长方形 $ABCD$ 中，已知 $AD=12$，$AB=5$，P 是 AD 边上任意一点，$PE\perp BD$ 于 E，$PF\perp AC$ 于 F，求 $PE+PF$ 的值？

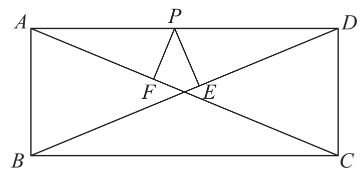


图 30.6

例 4 如图 30.8，在长方形 $ABCD$ 中，$AB=6$，$BC=8$，折叠纸片使得 A 和 C 重合，求折痕 EF 的长度。

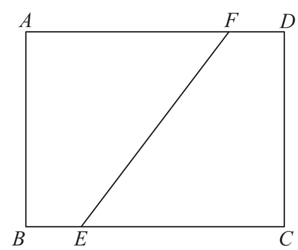


图 30.8

例 5 如图 30.10，在长方形 $ABCD$ 边 AB 上有一点 E，$\dfrac{AE}{EB}=\dfrac{3}{2}$，$DA$ 边上有一点 F，且 $EF=18$，沿 EF 对折后，A 落在 BC 上的点 G，求 AB 的长度。

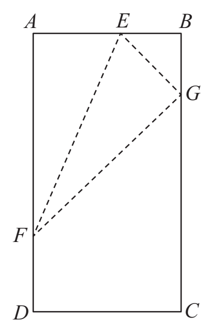


图 30.10

例 6 P 是长方形 $ABCD$ 内一点，若 $PA=3$，$PB=4$，$PC=5$，求 PD 的长度。

例 7 如图 30.13，已知长方形 $ABCD$ 中，$AB=4$，$BC=6$，点 M 为长方形内一点，E 为 BC 上任意一点，求 $MA+MD+ME$ 的最小值。

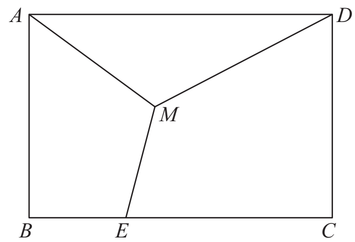


图 30.13

例 8 如图 30.17，菱形 $ABCD$ 中，$\angle B=60°$，延长 BA、BC，交过 D 点的任一直线于 E、F，AF 和 EC 的交点记为 M。求证：$\dfrac{CA}{CM}=\dfrac{CE}{CA}$。

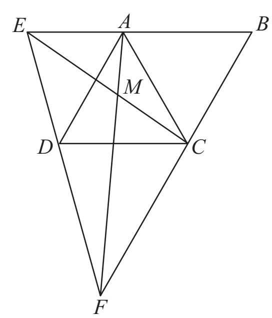


图 30.17

例 9 如图 30.18，如果把两个全等的长方形交叉重叠放置，那么重叠的公共部分的边界是否是一个菱形？请说明理由。

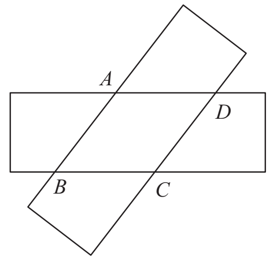


图 30.18

例 10 如图 30.20，在$\triangle ABC$中，$\angle ACB=90^\circ$，AD是$\angle CAB$的角平分线，CH是AB边上的高，$DE\perp AB$。求证：四边形$CDEF$是菱形。

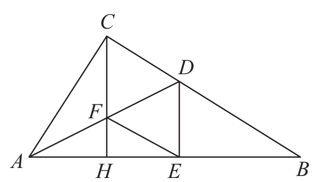


图 30.20

例 11 如图 30.21，P 是边长为 1 的菱形的对角线 AC 上一个动点，点 M、N 分别是 AB、BC 边的中点，求 $MP+NP$ 的最小值。

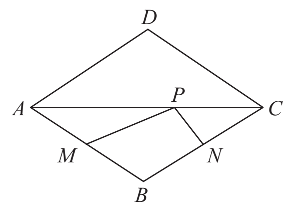


图 30.21

这次是求几条线段之和的最小值？

两条。

思路大概是什么方向？

把线段拼成一条折线后，再把折线拖直。

具体用什么方法？

两条线段嘛……对称。

这就对咯。

31 正方形

例 1 如图 31.1，正方形 $ABCD$ 中，E 为 CD 的中点，$EF \perp AE$，则 $\angle 1$ 和 $\angle 2$ 的大小关系如何？

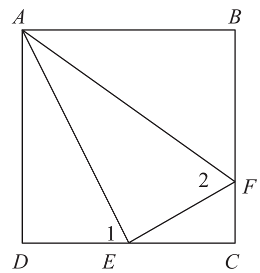


图 31.1

例 2 如图 31.2，在正方形 $ABCD$ 内任取一点 E，连 AE、BE，在 $\triangle ABE$ 外分别以 AE 和 BE 为边作正方形 $AEMN$ 和 $EBFG$，连 NC、AF，求证：$NC // AF$。

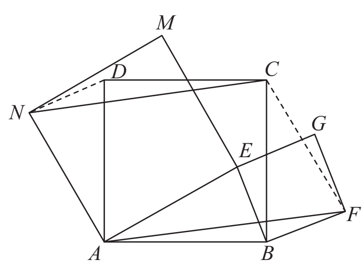


图 31.2

例 3 如图 31.3，正方形 $ABCD$、$DEFG$、$FHLK$ 有公共顶点，P 为 AK 中点。求证：$PE\perp CH$，且 $PE=\dfrac{CH}{2}$。

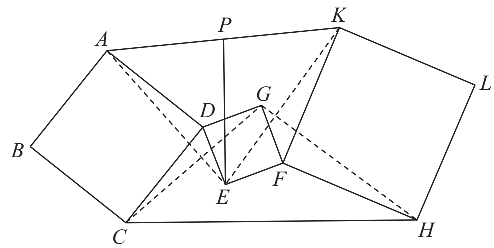


图 31.3

例 4 如图 31.5，已知在梯形 $ABCD$ 中，$AB//CD$，以 AD、BC 为边分别向外作正方形，K 是线段 EG 的中点。求证：$KD=KC$。

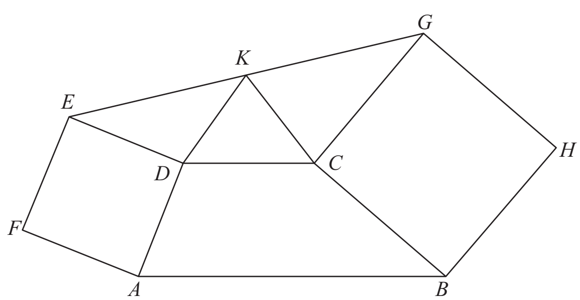


图 31.5

例 5 如图 31.8，正方形 $AEDB$、$ACFG$ 有公共顶点，P、M、Q、N 分别是 AD、BC、AF、EG 的中点。求证：四边形 $PMQN$ 是正方形。

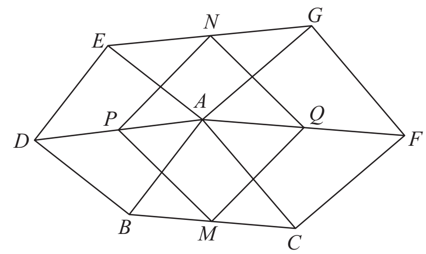


图 31.8

例 6 如图 31.11，正方形 $ADEF$、$AGCB$ 有公共顶点 A，作 $AH\perp FG$ 于 H，延长 HA 至 K，使得 $AK=FG$，作 $AS\perp BD$ 于 S，延长 SA，使得 $AR=BD$。求证：四边形 $RCKE$ 是正方形。

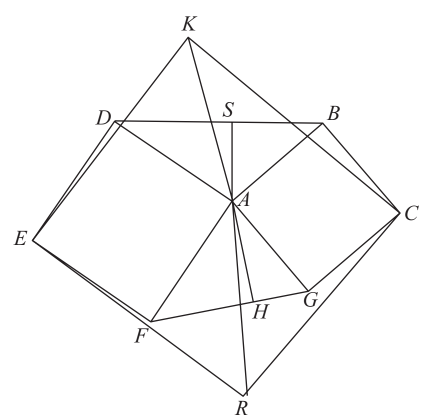


图 31.11

33 圆与角

例 1 如图 33.10，AD 是 $\triangle ABC$ 中 $\angle BAC$ 的角平分线，经过点 A 的圆 O 与 BC 相切于 D 点，与 AB、AC 相交于 E、F，求证：$EF//BC$。

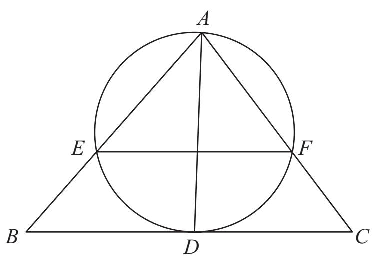


图 33.10

34 圆与线

例 1 如图 34.8，已知在四边形 $ABCD$ 中，$AB=BD$，$\angle BAD=60°$，$\angle BCD=120°$。证明：$BC+DC=AC$。

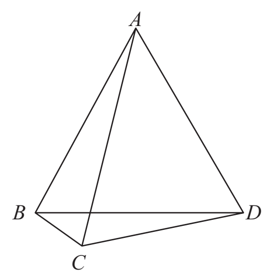


图 34.8

例 2 正五边形的一条对角线长为 4，求其边长。

36　集大成的圆

例 1 如图 36.1，AB 是半圆 O 的直径，作弦 AC、BD，分别过 C、D 作切线交于 P，求证：$PE\perp AB$。

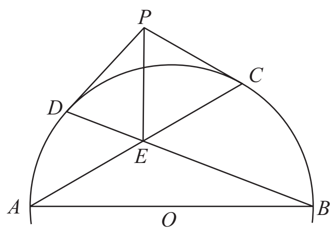


图 36.1

例 2 如图 36.3，AB 是圆 O 的弦，点 G、H 都在 AB 上，且 $AG=BH$，分别过 G、H 作弦 CD、EF，若 $\angle DGB=\angle FHA$，求证：$CD=EF$。

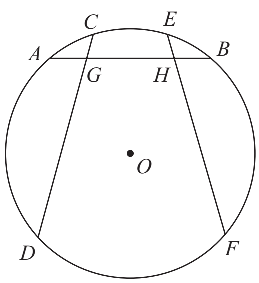


图 36.3

例 3 如图 36.5，圆 O 上有两点 A、C，B 在圆内。$AB=6$，$BC=2$，$AB\perp BC$，且圆的半径为 $5\sqrt{2}$，求 OB。

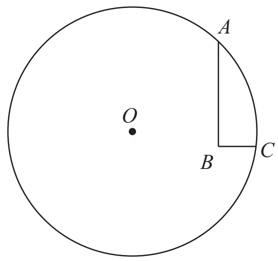


图 36.5

例 4 如图 36.8，已知四边形 $ABCD$ 内接于圆 O，对角线交于 F，延长 BA、CD 交于 P，PK 平分 $\angle BPC$，过 F 作 $EF\perp PK$ 于 E，分别交 PB、PC 于 M、N，求证 $\angle AFM=\angle BFM$。

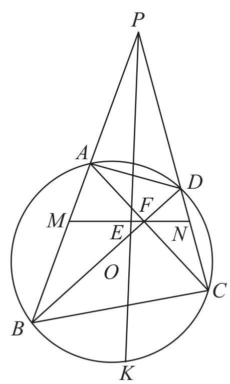


图 36.8

例 5 如图 36.9，四边形 $ABCD$ 内接于圆 O，且对角线 AC 和 BD 垂直，过 O 作 $OH\perp AD$ 于 H。求证 $OH=\dfrac{BC}{2}$。

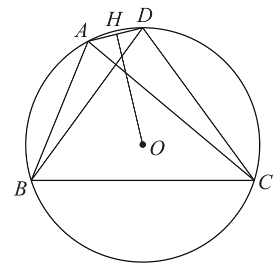


图 36.9

例 6 如图 36.11，两圆内切于 P，大圆的弦 AB 切小圆于 Q，连接 PA、PB 分别交小圆于 C、D，连接 PQ 与 CD 交于 H。求证：$\dfrac{CH}{AQ}=\dfrac{HD}{QB}$，且 $\angle APQ=\angle QPB$。

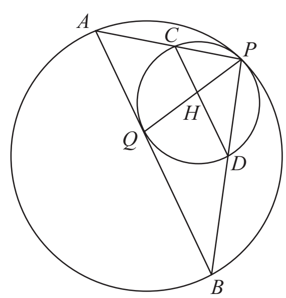


图 36.11

例 7 如图 36.14，已知点 D、E 在 $\triangle ABC$ 的边 BC 上，F 在 BA 的延长线上，若 $\angle DAE=\angle CAF$。求证：$\triangle ABD$ 和 $\triangle AEC$ 的外接圆相切。

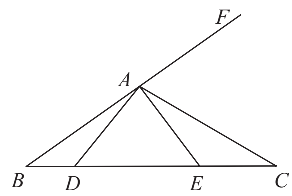
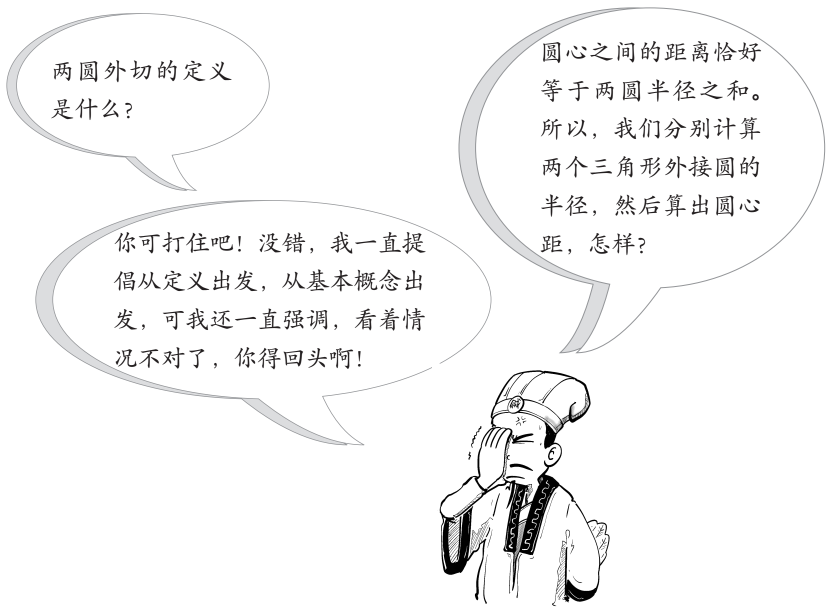


图 36.14



例 8 如图 36.16，PA、PB 是圆 O 的两条切线，PEC 是一条割线，D 是 AB 和 PC 的交点。

1. 当 PEC 通过圆心时，求证：$PE \cdot DC = PC \cdot DE$；

2. 当 PEC 不过圆心时，上述结论是否仍然成立？

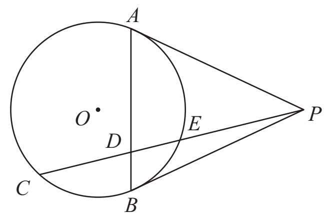


图 36.16

例 9 如图 36.18，$\triangle ABC$ 是锐角三角形，以 BC 为直径作圆 O，AD 切圆于 D，E 是 AB 上一点，作 $EF \perp AB$ 交 AC 延长线于 F，若 $\dfrac{AB}{AF}=\dfrac{AE}{AC}$，求证：$AD=AE$。

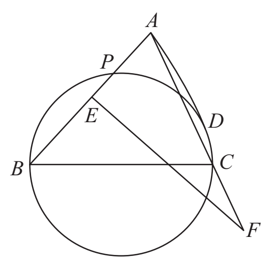


图 36.18

例 10 如图 36.20，$\triangle ABC$ 的内切圆分别切 BC、CA、AB 于 D、E、F，$DG \perp EF$ 于 G，求证：DG 平分 $\angle BGC$。

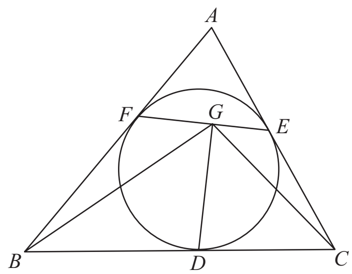


图 36.20

例 11 如图 36.22，证明：若在凸五边形 $ABCDE$ 中，$\angle ABC = \angle ADE$，$\angle AEC = \angle ADB$，则 $\angle BAC = \angle DAE$。

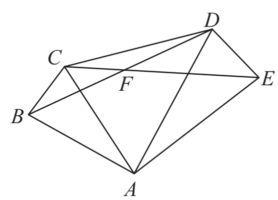


图 36.22

例 12 如图 36.24，已知圆 P 和圆 Q 相交于 A、B，直线 $MN \perp AB$，C 为 MN 中点，E、F 分别是圆 P 和圆 Q 上的点，且 $\angle APE = \angle AQF$，求证：$CE=CF$。

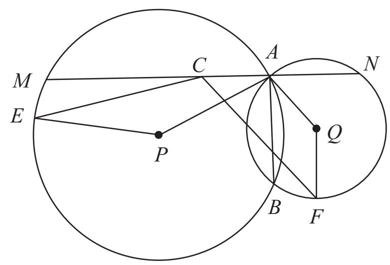


图 36.24

例 13 如图 36.27，已知两圆内切于 T，过 T 作大圆的两条弦 TA、TB，分别交小圆于 C、D，求证：$CD//AB$。

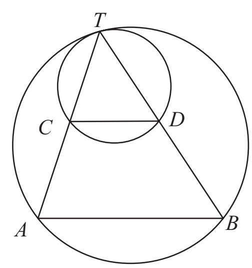


图 36.27

例 14 如图 36.29，如图$\triangle ABC$中，AL是角平分线，$AC=6$，$AB=13$，$BC=12$。过点B、C分别作$\triangle ABC$外接圆的切线BD、CE，且$BD=CE=BC$，直线DE与AB、AC的延长线交于点F、G，连接CF交BD于点M，连接BG交CE于点N。

1. 求线段FD的长；
2. 求证$\angle ALM=\angle ALN$。

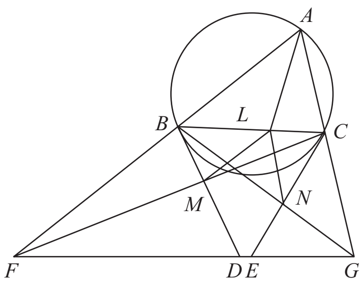


图 36.29

题中给出的数很讨厌，假如是 5, 12, 13，那看起来就顺眼多了。谁不喜欢勾股数呢？可偏偏有一个 6。

不要和题目“犯拧”，这是大忌啊！毕竟赌气、畏难，损失的可是你自己。

例 15 PA、PB 分别是圆的切线，M、N 分别是 PA、AB 的中点，直线 MN 与圆相交于 C、E，PC 与圆交于 D 点，连接 ND 并延长与 PB 交于 Q 点。求证：四边形 $MNQP$ 是菱形。

例 16 如图 36.31，AB 是圆 O 的直径，过点 B 作圆 O 的切线 BM，点 C 为 BM 上一点，连接 AC 与圆 O 交于点 D，E 为圆 O 上一点，且满足 $\angle EAC=\angle ACB$，连接 BD，BE。

1. 求证：$\angle ABE=2\angle CBD$；
2. 过点 D 作 AB 的垂线，垂足为 F，若 $AE=6$，$BF=\dfrac{3}{2}$，求圆 O 的半径长。

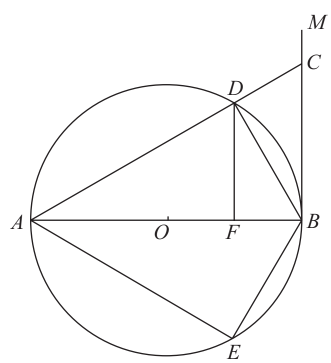


图 36.31

例 17 如图 36.34，在$\triangle ABC$中，$\angle ACB=90°$，$BC=12$，$AC=9$，以点C为圆心，6 为半径的圆上有一个动点D。连接AD、BD、CD，则$2AD+3BD$的最小值是______。

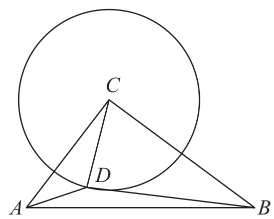


图 36.34